

Bernd H. Schlüter

Berechnungsgrundlagen zum RWE-Sonnenstandsdiagramm (SSD)

4/1987

Auszug aus:

Bernd H. Schlüter

„Berechnung der Sonneneinstrahlung auf beliebig ausgerichtete Flächen als Grundlage zur Optimierung des Energiegewinns mit fest ausgerichteten, unterschiedlich orientierten Solarzellen“

RWE AG / Universität-GHS-Essen, 4/1987

Seiten 4-17 und 67-70

<http://www.bernd-schlueter.de>

2 Grundlagen zur Berechnung des Sonnenstandes

2.1 Zielgrößen der Berechnung

Für einen beliebigen Ort (λ_o/φ_o) auf der Erde ist für eine beliebige Ortszeit Z_o und für einen beliebigen Tag N (Kalendertag) im Jahr die Einfallrichtung der Sonnenstrahlung α (Himmelsrichtung) sowie die Sonnenhöhe h über der Horizontalebene zu ermitteln. Weiterhin soll der Zeitpunkt (Z_{SA}/Z_{SU}) und die Himmelsrichtung (α_{SA}/α_{SU}) des Sonnenaufgangs und -untergangs hergeleitet werden.

Maßgeblich für alle Berechnungen ist das Zusammenspiel von Sonne und Erde. Nachfolgend sind alle wesentlichen Erscheinungen angeführt und die auftretenden Begriffe und Festlegungen erläutert. Im Anschluß daran werden die Gleichungen zur Berechnung des Sonnenstandes hergeleitet.

2.2 Zusammenspiel von Sonne und Erde /8,9/

Innerhalb eines Jahres umkreist die Erde die Sonne auf einer geschlossenen Bahn, die sich mit den Keplerschen-Gesetzen beschreiben läßt. Es handelt sich um elliptische Bahnen, wobei die Sonne sich in einem Brennpunkt befindet. Ebenfalls erfaßt Kepler die Geschwindigkeit der Erde bei ihrem Umlauf. Der Ortsvektor zu allen Planeten - so auch zur Erde - überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen, was bedeutet, daß die Erdgeschwindigkeit Schwankungen unterliegt. Bewegt sich die Erde auf die Sonne zu (Sommer, Winter) so wird sie positiv beschleunigt und umgekehrt (Frühling, Herbst) abgebremst.

Während dieses Umlaufs dreht die Erde sich 365 mal von West über Süd nach Ost um sich selbst, d. h. sie rotiert um die Rotationsachse (Erdachse), jene Gerade, die die Erdoberfläche an den Polen durchstößt.

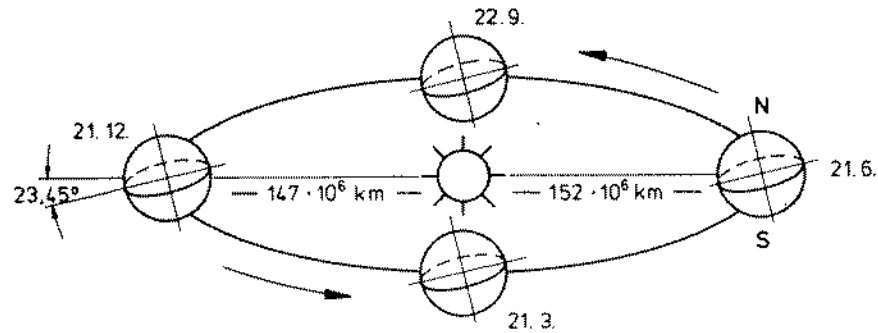
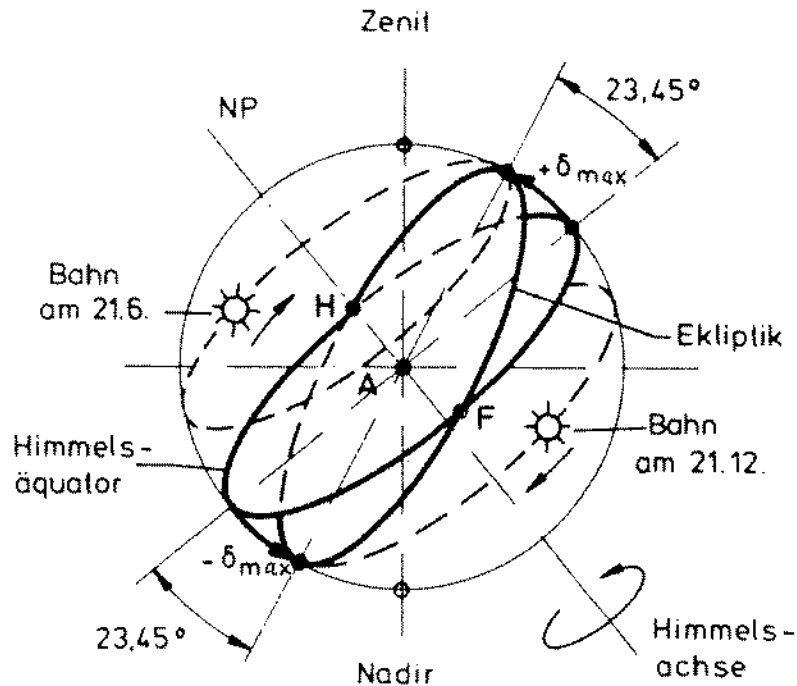


Bild 1: Jährliche Bahn der Erde um die Sonne /8/

Die Erdachse ist gegen die Flächennormale der Bahnebene (Ekliptikalebene) um 23.45° geneigt. Diese Neigung ist gegenüber dem Fixsternhimmel als Fundamentalsystem in Richtung und Größe konstant (von einer geringen Nutation der Erdachse soll abgesehen werden). Auf diese Neigung ist die Entstehung der 4 Jahreszeiten zurückzuführen, wobei der Sonnenhöchststand am 21. Juni auf der Nordhalbkugel und am 21. Dezember auf der Südhalbkugel zu finden ist. Am 21. März und 22. September steht die Sonne senkrecht über dem Äquator.

Würde man jeweils Mittags bei Sonnenhöchststand den Stand der Sonne am dahinterliegenden Himmelsgewölbe markieren und die entstehenden Punkte verbinden, so würde eine geschlossene Sonnenbahn entstehen, die man als Ekliptik bezeichnet. Sie ist gegen den Himmelsäquator, der der Projektion des Erdäquators ans Himmelsgewölbe entspricht, um 23.45° geneigt. Die Schnittpunkte der Ekliptik mit dem Himmelsäquator bezeichnet man als Frühlingspunkt F und Herbstpunkt H. (vgl. Bild 2).

Bild 2: Ekliptik und Jahresgang der Deklination δ /8/

Als weitere wichtige Angabe benötigt man die Mittagssonnenhöhe (Höchststand der Sonne), die als Deklination bezeichnet wird. Dieser Winkel wird von der Erdäquatorebene (= Himmelsäquatorebene) und der Richtung zur Sonne auf der Ekliptik gebildet.

2.3

Koordinaten des Standortes λ_0, φ_0

In Bild 3 ist der Ort A auf der Erdoberfläche mit den zugehörigen Lokalisierungswinkeln eingezeichnet. Er wird mit Längengrad λ_0 und Breitengrad φ_0 beschreiben. Die Längengrade (Meridiane) werden östlich vom Nullmeridian (verläuft durch Greenwich) positiv und westlich negativ gezählt. Die größte Winkelangabe für λ_0 beträgt $\pm 180^\circ$. Bei den Breitengraden, die im Winkelintervall $[-90, +90]$ liegen wird auf der nördlichen Halbkugel φ_0 positiv und auf der südlichen Halbkugel φ_0 entsprechend negativ angegeben.

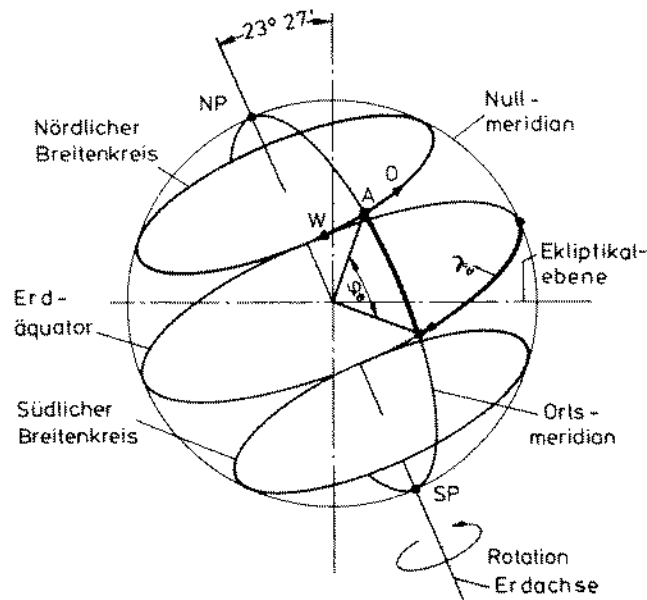


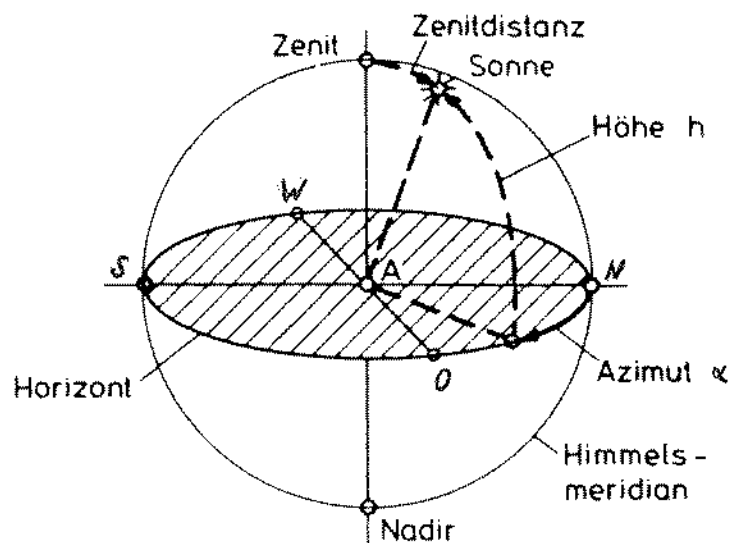
Bild 3: Ortsbestimmung auf der Erde

2.4

Beschreibung des Sonnenstandes

Der Standort der Sonne kann mit zwei Winkeln beschrieben werden (Bild 4):

Sonnenrichtung α (Azimut) und Sonnenhöhe h über der Horizontalebene (oder auch einfach Horizont). Der Sonnenazimut wird hierbei wie bei der Grad-Einteilung beim Kompaß im Norden = 0° , im Osten = 90° usw. festgelegt.

Bild 4: Sonnenstand mit Azimut α und Höhe h für den Ort A /8/

2.5

Umrechnung der Ortszeit Z_0 in die Sonnenzeit St ,
 Sonnenzeitwinkel ω

Zur Zeiteinteilung sind astronomische Vorgänge, die sich in strenger Regelmäßigkeit periodisch wiederholen, besonders geeignet. So bezeichnet der Sonnentag die Zeit zwischen zwei Kulminationen der Sonne, d. h. die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgende Höchststellungen der Sonne beim Durchgang durch den Nord-Süd-Meridian des Beobachtungsortes. Diese Zeit, die auch als "wahre Sonnenzeit" bezeichnet wird (Sonnenhöchststand definitionsgemäß 12.00 Uhr Sonnenzeit) ist jedoch ein ungleichmäßiges Zeitmaß, da sich die "Geschwindigkeit" der Sonne periodisch ändert und die Sonnenbahn gegenüber dem Himmelsäquator geneigt ist. Aus diesen Gründen definiert man eine "mittlere Sonnenzeit" - auch mittlere Ortszeit (MOZ) - die für eine Sonne gilt, die bei gleicher Umlaufzeit mit konstanter Umlaufgeschwindigkeit auf dem Himmelsäquator umläuft. Die Differenz zwischen wahrer und mittlerer Sonnenzeit heißt Zeitgleichung E . Zur Vereinfachung ist die Erde in durchschnittlich 15 Längengrade umfassende Zeitzonen eingeteilt, in denen die Zonenzeit Z_0 - im weiteren mit "Ortszeit" bezeichnet - gilt (Mitteleuropa: $Z_0 = \text{MEZ}$).

- 9 -

Die Sonnenzeit St läßt sich aus der Ortszeit Z_o berechnen:

$$St = Z_o + \frac{E}{60} + (\lambda_o - Z_{St}) \cdot \frac{1}{15} \quad (2.1)$$

wobei Z_o : Ortszeit,

E : Zeitgleichung in min,

λ_o : Längengrad des Ortes,

Z_{St} : Zeit-Bezugsmeridian des Ortes

Zur Berechnung der wahren Sonnenzeit muß die Ortszeit mit zwei Größen korrigiert werden.

a) E : Zeitgleichung

Nach Bild 5 setzt sich die Zeitgleichung aus der Überlagerung zweier Einzelkorrekturkurven zusammen (Kurve 1 und Kurve 2).

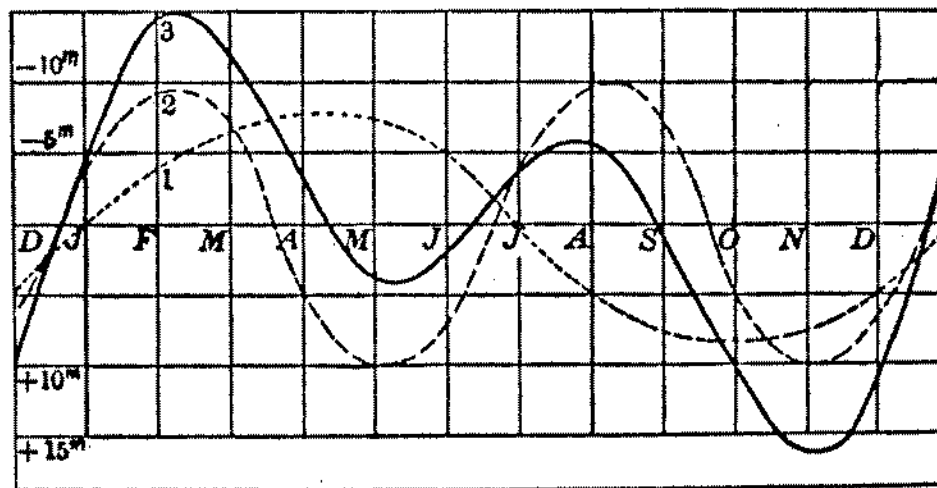


Bild 5: Entstehung der Zeitgleichung /9/

Kurve 1 entspricht der Abweichung von der definierten mittleren Sonnenzeit bezüglich der Geschwindigkeitsänderungen (oben beschreiben) beim Umlauf der Erde um die Sonne. Weiterhin soll nach Definition der mittleren Sonnenzeit die Sonne auf dem Himmelsäquator umlaufen.

- 10 -

Die Projektion des von der Sonne zurückgelegten Wegstücks auf den Himmelsäquator ist aufgrund der "Schiefe der Ekliptik" nicht immer gleich groß (vgl. Bild 6).

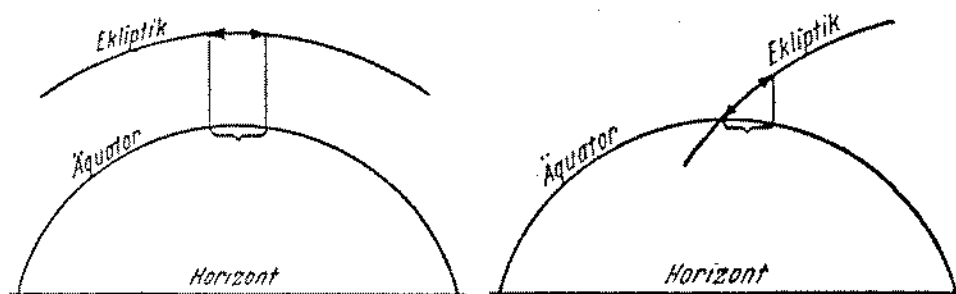


Bild 6: Projektion eines Wegstückes der Sonne auf den Himmelsäquator /9/

Diese Abweichung soll in Kurve 2 aus Bild 5 erfaßt werden.

Die Gesamtkurve der Zeitgleichung (Kurve 3 in Bild 5) läßt sich mit verschiedenen mathematischen Formeln beschreiben. Nach /6/ wird sie angenähert durch:

$$E = - 14,2 \cdot \sin \left(\frac{N+7}{113} \cdot 180 \right) \quad \text{für } 1 \leq N < 107$$

$$E = 4 \cdot \sin \left(\frac{N-106}{59} \cdot 180 \right) \quad \text{für } 107 \leq N < 167$$

$$E = - 6,5 \cdot \sin \left(\frac{N-166}{80} \cdot 180 \right) \quad \text{für } 167 \leq N < 247$$

$$E = 16,4 \cdot \sin \left(\frac{N-247}{113} \cdot 180 \right) \quad \text{für } 247 \leq N \leq 365 \quad (2.2)$$

Aydinli /1/ gibt folgenden Ausdruck an:

$$E(N) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \cos \left(i \cdot \frac{2\pi}{\rho} \cdot N + b_i \right) \quad (2.3)$$

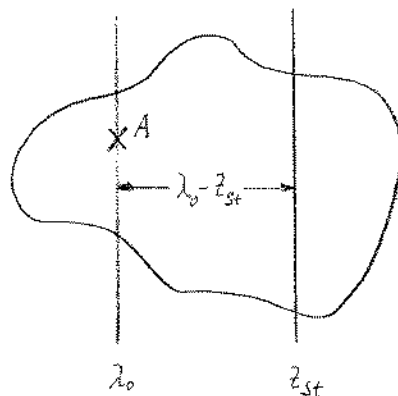
- 11 -

mit

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,0132 \\ a_1 &= 7,3525 \\ a_2 &= 9,9359 \\ a_3 &= 0,3387 \\ b_1 &= 1,4989 \\ b_2 &= 1,9006 \\ b_3 &= 1,8360 \end{aligned}$$

Hierin bedeutet N jeweils den vom 1. Januar aus gezählten Tag des Jahres von 1 bis 365 und $p = 365$ die Periodenlänge. E wird dabei in Minuten angegeben.

b) Korrekturen der Zonenzeit (Ortszeit) zur mittleren Ortszeit



Die Sonne bewegt sich am Himmel in einer Stunde um 15° weiter. Mit nebenstehender Skizze ergibt sich die zweite Korrektur:

$$\frac{\lambda_0 - Z_{St}}{15} \quad (2.4)$$

Der Sonnenzeitwinkel ω beschreibt die momentane Richtung in der die Sonne zur Sonnenzeit St gerade steht. Folgende Definition für ω wird von den meisten Autoren angegeben

$$\omega = 15 \cdot (12 - St) \quad (2.5)$$

Um 12 Uhr Sonnenzeit ist $\omega = 0^\circ$. Am Vormittag wird ω positiv gezählt, am Nachmittag entsprechend negativ (s. Bild 7 a)

2.6 Berechnung der Deklination δ

Auch für die Deklination sind verschiedene Gleichungen zu finden. In /6/ ist:

$$\delta = \delta_{\max} \cdot \sin (1,008 (N-80)) \quad 1 \leq N \leq 80 \quad (\pm 0,59^\circ \text{ im Feb.})$$

$$\delta = \delta_{\max} \cdot \sin (0,965 (N-80)) \quad 81 \leq N \leq 266 \quad (\pm 0,50^\circ \text{ im Aug.})$$

$$\delta = -\delta_{\max} \cdot \sin (0,975 (N-266)) \quad 267 \leq N \leq 365 \quad (\pm 0,45^\circ \text{ im Okt.})$$

(2.6)

oder:

$$\delta = \delta_{\max} \cdot \sin (0,985 (N-81)) \quad 1 \leq N \leq 365 \quad (\pm 1^\circ) \quad (2.7)$$

mit $\delta_{\max} = 23.45^\circ$.

Aydinli /1/ benutzt Gleichung (2.3) mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,7896 & (2.8) \\ a_1 &= -23,2559 \\ a_2 &= -0,3915 \\ a_3 &= -0,1764 \\ b_1 &= 0,1582 \\ b_2 &= 0,0934 \\ b_3 &= 0,4539 \end{aligned}$$

2.7 Berechnungsverfahren nach Preußker /11/

Für die Herleitung zur Berechnung des Sonnenstandes soll hier das Verfahren von Preußker zugrunde gelegt werden. Es wird mit den Gesetzen der Sphärischen-Geometrie durchgeführt. Im Gegensatz zu anderen Veröffentlichungen, die sich der Vektorrechnung bedienen, ist das Verfahren nach Preußker recht anschaulich. Ergänzend hierzu werden bei der Programmerstellung für die Berechnung der Deklination und der Zeitgleichung die Formeln aus /6/ (2.2, 2.6) verwendet. Die angegebene Genauigkeit von δ ist für diese Berechnungen ausreichend.

Als Grundlage für die weiteren Herleitungen soll Bild 7 dienen. Hierin ist der betreffende Standort 0 auf der Erdoberfläche dargestellt. Alle bekannten und zu berechnenden Winkel sind eingezeichnet.

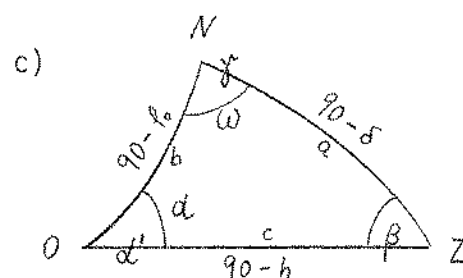
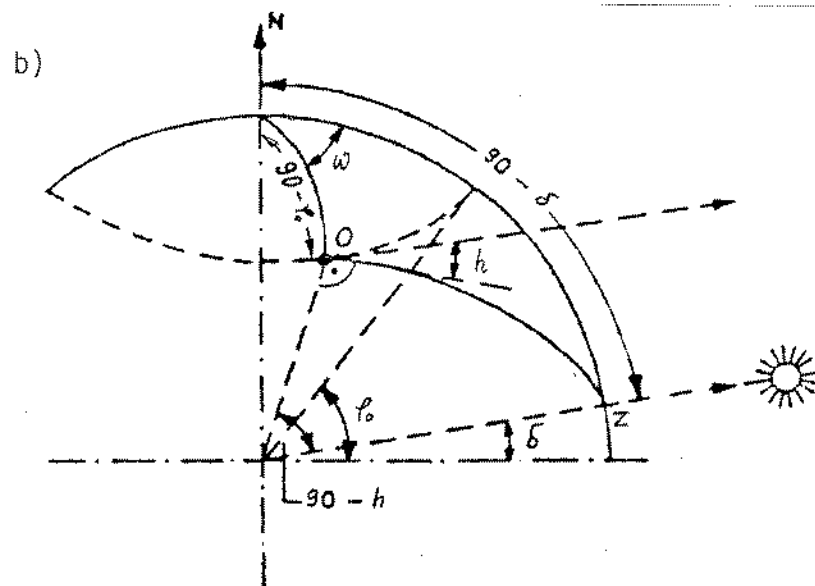
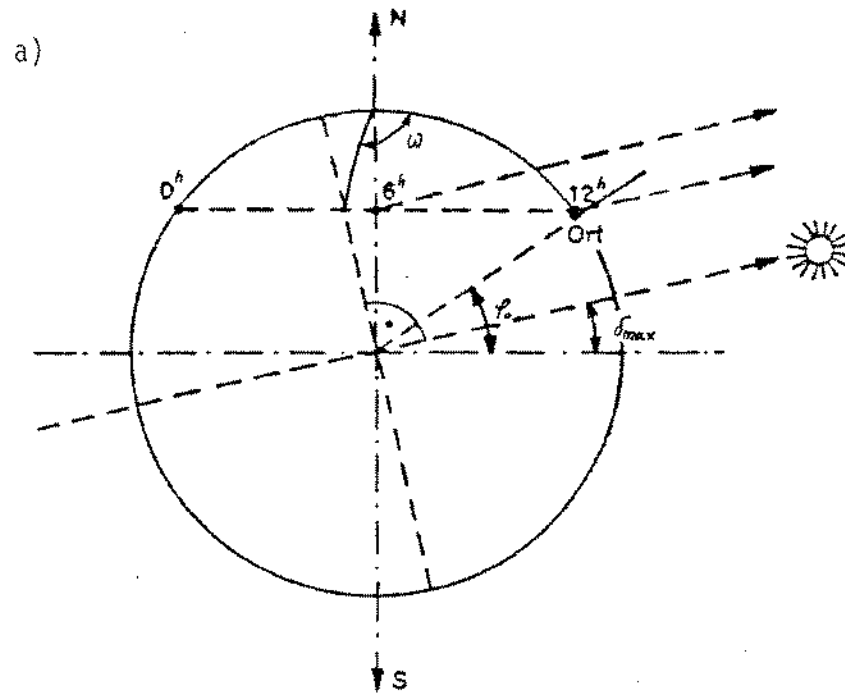


Bild 7: Berechnungsgrundlage des Sonnenstandes am Ort 0

In Teil c, der Abbildung ist das auf der Kugeloberfläche entstehende sphärische Dreieck herausgezeichnet, welches anschließend für die Berechnungen benötigt wird.

2.8 Berechnung des Höhenwinkels h der Sonne über dem Horizont

Mit dem Seitencosinussatz der sphärischen Geometrie:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \delta$$

ergibt sich:

$$\cos(90-h) = \cos(90-\delta) \cdot \cos(90-\rho_0) + \sin(90-\delta) \cdot \sin(90-\rho_0) \cdot \cos \omega$$

$$\sin h = \sin \delta \cdot \sin \rho_0 + \cos \delta \cdot \cos \rho_0 \cdot \cos \omega \quad (2.9)$$

2.9 Berechnung des Azimut α (Richtungswinkel) der Sonne

Mit dem Sinussatz:
$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin c}{\sin \delta}$$

wird

$$\sin \alpha = \frac{\sin(90-\delta) \cdot \sin \omega}{\sin(90-h)}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin \omega \cdot \cos \delta}{\cos h} \quad (2.10)$$

Mit einem weiteren Seitencosinussatz für a:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha'$$

ist

$$\cos(90-\delta) = \cos(90-\rho_0) \cdot \cos(90-h) + \sin(90-\rho_0) \cdot \sin(90-h) \cdot \cos \alpha$$

$$\sin \delta = \sin \rho_0 \cdot \sin h + \cos \rho_0 \cdot \cos h \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin \delta - \sin \rho_0 \cdot \sin h}{\cos \rho_0 \cdot \cos h} \quad (2.11)$$

Für die Berechnung des Sonnen-Azimuths von $0^\circ - 360^\circ$ sind - wie oben hergeleitet - beide Formeln nötig. Der Hauptwertbereich des $\arcsin(x)$ liegt zwischen -90° und 90° , der $\arccos(x)$ zwischen 0° und 180° . In geeigneter Kombination ist die Darstellung von $0^\circ - 360^\circ$ möglich.

2.10 Berechnung der Ortszeit des Sonnenaufgangs und -untergangs

Aus (2.9) mit $h = 0^\circ$:

$$\sin 0 = \sin \delta \sin \varphi_0 + \cos \delta \cos \varphi_0 \cos \omega$$

$$\cos \omega = \frac{-\sin \delta \cdot \sin \varphi_0}{\cos \delta \cdot \cos \varphi_0}$$

$$\cos \omega = -\tan \varphi_0 \cdot \tan \delta \quad (2.12)$$

Mit Gleichung (2.5) ergibt sich die Sonnenaufgangszeit S_{as} und die Sonnenuntergangszeit S_{us}

$$\begin{aligned} S_{as} &= 12 - \frac{\omega}{15} - C \\ S_{us} &= 12 + \frac{\omega}{15} + C \end{aligned} \quad (2.13)$$

und daraus die entsprechende Ortszeit Z_{SA} , Z_{SU} :

$$\begin{aligned} Z_{SA} &= S_{as} - \frac{E}{60} - (\lambda_0 - Z_{St}) \cdot \frac{1}{15} \\ Z_{SU} &= S_{us} - \frac{E}{60} - (\lambda_0 - Z_{St}) \cdot \frac{1}{15} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die Sonnenaufgangs- und untergangsberechnungen beziehen sich auf den geometrischen Ort des Sonnenzentrums. Seitdem der Sonnenaufgang als der Zeitpunkt definiert ist, wo der obere Rand der Sonne über dem Horizont sichtbar wird, muß eine Korrektur C vorgenommen werden, die sich aus 3 Einzelkorrekturen zusammensetzt:

- 16 -

- Zeitausgleich zwischen Sichtbarwerden des Sonnenrandes und der berechneten Sonnenaufgangszeit des Sonnenzentrums --> 16 Bogenminuten
- Beugung der Sonnenstrahlen in der Atmosphäre --> 36 Bogenminuten

zusammen 52 Bogenminuten $\hat{=}$ 0,0578 h ($15^\circ \hat{=}$ 1 h)

- Die Sonne geht nur in Äquatornähe senkrecht zum Horizont auf

aus allen drei Einzelkorrekturen wird:

$$C = \frac{0,0578}{\cos \rho_0 \cdot \sin(-\omega)} \quad (2.15)$$

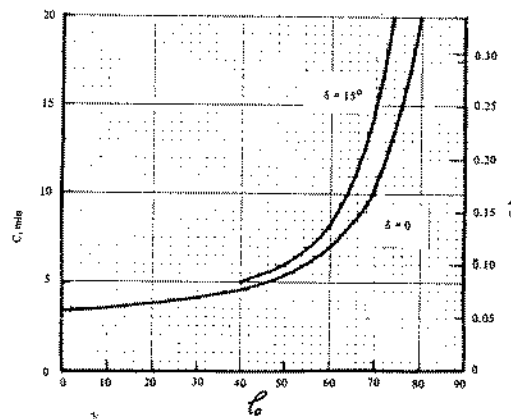


Bild 8: Darstellung C (h)

2.11 Berechnung der Richtung des Sonnenaufgangs und -untergangs

Aus (2.11) mit $h = 0^\circ$:

$$\cos \alpha = \frac{\sin \delta - \sin \rho_0 \cdot \sin 0}{\cos \rho_0 \cdot \cos 0}$$

$$\cos \alpha_{SA/SU} = \frac{\sin \delta}{\cos \rho_0}$$

- 17 -

Aus (2.10) mit $h = 0^\circ$:

$$\sin \alpha = \frac{\sin \omega \cdot \cos \delta}{\cos 0} = \sin \omega \cdot \cos \delta$$

$$\text{mit (2.12) und } \sin \omega = \sqrt{1 - \cos^2 \omega}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \tan^2 \rho_0 \cdot \tan^2 \delta} \cdot \cos \delta$$

$$1 - \cos^2 \alpha = (1 - \tan^2 \rho_0 \cdot \tan^2 \delta) \cdot \cos^2 \delta$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \delta - \tan^2 \rho_0 \cdot \tan^2 \delta \cdot \cos^2 \delta}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\sin^2 \delta - \tan^2 \rho_0 \cdot \sin^2 \delta}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\sin^2 \delta (1 - \tan^2 \rho_0)}$$

$$\text{mit } \frac{1}{\cos^2 \rho_0} = 1 - \tan^2 \rho_0$$

$$\cos \alpha_{SA/SU} = \frac{\sin \delta}{\cos \rho_0} \quad (2.16)$$

Beide Rechengänge führen zum selben Ergebnis. Die Winkel α_{SA} und α_{SU} verstehen sich somit symmetrisch zur Nordrichtung $= 0^\circ$.

Anhang 1: Verwendete Größen und Formelzeichen

λ_0	geographische Länge (Meridian durch Greenwich = 0°, nach Osten positiv)
φ_0	geographische Breite (Äquator = 0°, Nordhalbkugel= positiv)
Z_0	Ortszeit (ohne Berücksichtigung der Sommerzeit)
Z_{St}	Bezugsmeridian für Ortszeit (Europa = 15°)
St	wahre Sonnenzeit
ω	Sonnenzeitwinkel um Mittag (12 Uhr = 0°, Vormittag = positiv)
δ	Sonnendeklination
h	Höhenwinkel der Sonne über Horizont (senkrecht = 90°)
α	Sonnenazimut (N = 0°, O = 90°, ...)
$Z_{SA/SU}$	Ortszeit des Sonnenaufgangs und -untergangs
$\alpha_{SA/SU}$	Azimut " " " "
G	Globalbestrahlungsstärke auf horizontale Fläche
G_{dir}	Direktbestrahlungsstärke " " "
G_{dif}	Diffusbestrahlungsstärke " " "
S	Globalbestrahlungsstärke auf beliebig orientierte Flächen
S_{dir}	Direktbestrahlungsstärke " " " "
S_{dif}	Diffusbestrahlungsstärke " " " "
S_{ref}	Reflektierte Bestrahlungsstärke " " "

- 68 -

α_F	Azimut des Flächennormalenvektors ($N = 0^\circ, 0 = 90^\circ, \dots$)
β	Höhenwinkel des " über Horizont (horizontale Fläche = 90°)
θ	Winkel zwischen der Flächennormalen und den einfallenden Sonnenstrahlen
r_u	Mittlerer Reflexionsgrad der Umgebung

Literaturverzeichnis

- /1/ S. Aydinli
Über die Berechnung der zur Verfügung stehenden Solar-
energie und des Tageslichtes
Fortschritt-Berichte der VDI-Zeitschr. Reihe 6, Nr. 79
Reihe: Energietechnik-Wärmetechnik
VDI-Verlag
- /2/ BMFT-Forschungsbericht (03E-5280-A)
Entwicklung von Testreferenzjahren (TRY) für Klima-
regionen der Bundesrepublik Deutschland
Deutscher Wetterdienst
- /3/ DIN 4710
Meteorologische Daten
- /4/ Jörg Fasholz
Die Nutzung regenerativer Energieträger
RWE AG, Essen
- /5/ W. Heindl, H.A. Koch
Die Berechnung von Sonneneinstrahlungsintensitäten
für wärmetechnische Untersuchungen im Bauwesen
Gesundheits-Ingenieur 1976 S. 301 - 314
- /6/ International Energy Agency
An introduction to meteorological measurements and
data handling for solar energy applications
U.S. Department of Energy
- /7/ Kipp & Zonen (Gebrauchsanleitung)
Pyranometer with shadow ring
- /8/ K. H. Köthe
Praxis solar- und windelektrischer Energieversorgung
VDI-Verlag

- 70 -

- /9/ dtv-Lexikon der Physik
dtv-Verlag
- /10/ W. Palz
Atlas über die Sonnenstrahlung Europas
Band 1 und 2
Herausgeber: Kommission der Europäischen Gemeinschaften
Verlag TÜV Rheinland
- /11/ Dr.-Ing. H. Preußker
Berechnung der Sonneneinstrahlung
TAB 3/72 S. 237 - 242
- /12/ H. Späth
Algorithmen für elementare Ausgleichsmodelle
Oldenbourg Verlag, München